La Fonction Dérivée

JP Vallon

Lycée Gaspard Monge - Savigny sur Orge

2011

Lignes directrices

1. Modélisation
2. Principaux résultats :
   - Signe de la fonction dérivée et variations
   - Extremum d'une fonction
   - Approximation affine d'une fonction en un point
3. Ne pas confondre dérivées et limites

Une expérience

On lâche une balle d'une hauteur de 2 mètres environ. Avec un détecteur à ultrasons, on mesure en fonction du temps écoulé la distance parcourue par rapport au détecteur.

MESURES

MODELE → Distance=4,67*Temps^2+0,17*Temps+0,42

temps(s)	distance(m)
0,129	0,516
0,151	0,552
0,172	0,593
0,194	0,630
0,215	0,676
0,237	0,724
0,258	0,776
0,280	0,832
0,301	0,893
0,323	0,958
0,344	1,030
0,366	1,106
0,387	1,186
0,409	1,277
0,430	1,370
0,452	1,441

Temps	distance
0,129	0,520
0,151	0,552
0,172	0,587
0,194	0,629
0,215	0,672
0,237	0,723
0,258	0,775
0,280	0,834
0,301	0,894
0,323	0,962
0,344	1,031
0,366	1,108
0,387	1,185
0,409	1,271
0,430	1,357
0,452	1,451

0,410	1,275

Des mesures au modèle

Questions :

- Que vaut la distance d pour $t = 0$? ou $t = 0,410$ (en vert sur l'image précédente) ?
- A quel instant t la balle touche le sol ?
- Avec quelle "vitesse" la balle touche le sol ?

Les mesures ne permettent pas de répondre à ces questions. Mais on remplace les données par un **un modèle** : ici, une fonction qui relie la distance d au temps t :

$$t \xrightarrow{f} d = 4,67t^2 + 0,17t + 0,42$$

Exercice : Quels calculs doit-on faire (sans les faire) pour répondre aux deux premières questions ?

Modéliser la vitesse

- vitesse moyenne = $\frac{\Delta d}{\Delta t}$. ($\Delta$ signifie "variation de :")
- Si t_s désigne l'instant où la balle touche le sol et si Δt est "petit" quelques millisecondes alors $v(t_s)$ la vitesse au sol vérifie :
$$v(t_s) \approx \frac{d(t_s + \Delta t) - d(t_s)}{\Delta t}$$
- Mieux en maths pour rendre quelque chose "infiniment" petit on le fait tendre vers 0, donc idéalement
$$v(t_s) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{d(t_s + \Delta t) - d(t_s)}{\Delta t}$$

(si cette limite existe !)

Modéliser la vitesse

Pour simplifier les calculs prenons $d = 5t^2$ et remplaçons Δt par h.

Donc $\dfrac{d(t_s + \Delta t) - d(t_s)}{\Delta t} = \dfrac{5(t_s + h)^2 - 5t_s^2}{h} = \ldots\ldots\ldots$

- Finir le calcul algébrique puis faire $h \to 0$ on obtient alors $v(t_s)$

Modéliser la vitesse

Pour simplifier les calculs prenons $d = 5t^2$ et remplaçons Δt par h.

Donc $\dfrac{d(t_s + \Delta t) - d(t_s)}{\Delta t} = \dfrac{5(t_s + h)^2 - 5t_s^2}{h} = \ldots\ldots\ldots$

- Finir le calcul algébrique puis faire $h \to 0$ on obtient alors $v(t_s)$
- Bravo ! $v(t_s) = 10t_s$
- Vocabulaire : On dit que la fonction vitesse est la fonction dérivée de la fonction distance

Généraliser le calcul précédent

Heureusement la plupart du temps il existe une autre méthode plus systématique pour calculer la fonction dérivée :
Car

- On retombe en sciences à peu près sur les mêmes fonctions ($\approx$ molécules)
- s'exprimant à partir de fonctions élémentaires ($\approx$ atomes)

D'où la méthode Analyse-Synthèse

Quelques définitions

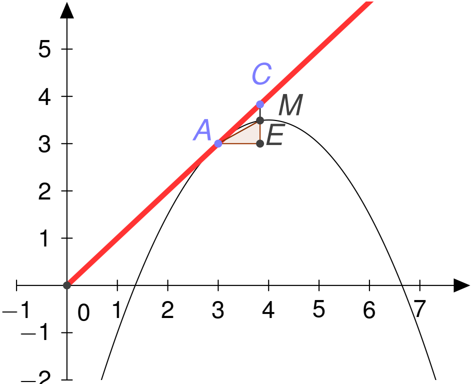
Définition : Une fonction f est dérivable en un point a si $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe.
Cette limite ,qui dépend de f et de a est notée $f'(a)$ et appelée nombre dérivé de f en a.
Lorsque le calcul de $f'(a)$ peut se faire sur tout un intervalle I on crée ainsi une nouvelle fonction

$$a \xrightarrow{f'} f'(a)$$

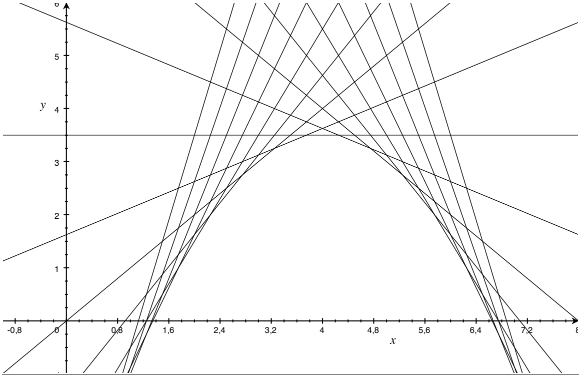
la fonction f' dérivée de f
Exercice : Prouver que $f(x) = \frac{1}{x}$ a pour nombre dérivé en tout point $x = a$ $f'(a) = -\frac{1}{a^2}$ et que la fonction dérivée de $x \to \frac{1}{x}$ est $x \to \frac{-1}{x^2}$

Tangente comme limite de sécantes

Si $A(a, f(a))$ et $M(a+h, f(a+h))$ vérifier que la pente de [AM] est $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$
Si cette fraction a une limite l lorsque h tend vers 0 c'est à dire lorsque M se rapproche de A, alors l est la pente de la tangente en A



"Reconstruire" une courbe à partir de ses tangentes



Exercice : Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de $f(x) = x^3 - x + 1$ au point $x = a$ avec $-2 \leq a \leq 2$

Analyse-Synthèse

Analyser un problème c'est le

- Décomposer le problème en sous-problèmes plus simples à résoudre
- Résoudre les sous-problèmes
- Rassembler les sous-problèmes (faire la synthèse) pour résoudre le problème initial

algèbre des fonctions dérivables

Dériver une fonction c'est la

- Décomposer en fonctions élémentaires
- Dériver les fonctions élémentaires
- Faire la synthèse en utilisant les formules de dérivation

Fonctions élémentaires

Fonction élémentaire	Fonction dérivée
$x \longrightarrow x^n$ avec $x \in Q$	$x \longrightarrow nx^{n-1}$
$x \longrightarrow \sin(x)$	$x \longrightarrow \cos(x)$
$x \longrightarrow \cos(x)$	$x \longrightarrow -\sin(x)$
$x \longrightarrow e^x$	$x \longrightarrow e^x$

Formules de dérivation

- $(u+v)' = u' + v'$
- $(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$
- $(u^n)' = n \times u^{n-1} \times u'$
- $(\frac{u}{v})' = \frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$
- $vou = (v'ou) \times u'$

On prouve ces formules avec la définition de la dérivabilité d'une fonction en un point

Formules de dérivation : application

Calculer les fonctions dérivées sur les intervalles donnés de

- $f(x) = x\sin(x)$ avec $x \in R$
- $g(t) = \dfrac{\sin(t)}{t}$ avec $t \in R^*$
- $h(\theta) = \sqrt{1 + \theta^2}$ avec $\theta \in R$
- $k(z) = \mathrm{e}^{-z^2}$ avec $z \in R$

Formules de dérivation : application

Calculer les fonctions dérivées sur les intervalles donnés de

- $f(x) = x\sin(x)$ avec $x \in R$
- f est le produit de deux fonctions élémentaires ! donc $f'(x) = \sin(x) - x\cos(x)$
- $g(t) = \dfrac{\sin(t)}{t}$ avec $t \in R^*$
- $h(\theta) = \sqrt{1 + \theta^2}$ avec $\theta \in R$
- $k(z) = \mathrm{e}^{-z^2}$ avec $z \in R$

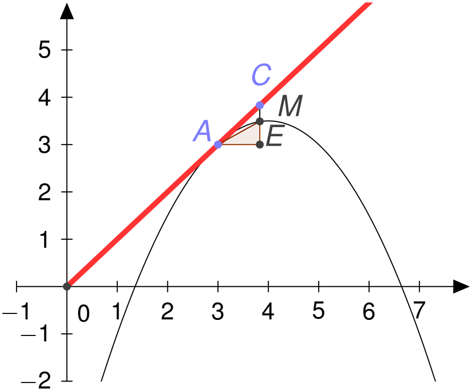
Théorème de Lagrange

Théorème : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
Si $f' \geq 0$ sur I alors f est croissante sur I.
Si $f' \leq 0$ sur I alors f est décroissante sur I.

Condition nécessaire et suffisante pour un extremum

Théorème : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. f a un extremum en a si et seulement si f' s'annule en a <u>et</u> change de signe
Contre-exemple : Pour $f(x) = x^3$ f' s'annule en $x = 0$ mais ne change pas de signe
On dit que la condition "f' s'annule en $x = 0$ " est **nécessaire** mais non suffisante !

Approximation affine d'une fonction en un point



Théorème : Soit f une fonction dérivable en un point a. Alors il existe une fonction ϕ définie sur un voisinage de 0 tel que
$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\phi(h)$
$f(a+h) - f(a) = hf'(a) + h\phi(h)$ avec $\lim_{h\to 0}\phi(h) = 0$

Incertitude sur une mesure

Supposons que nous mesurons le volume V et la température T d'un gaz que nous supposons parfait dans ce cas nous pouvons en déduire par calcul la pression P par la formule :

$$P = \frac{nRT}{V}$$

Toute mesure n'étant pas parfaite il est raisonnable de supposer que la mesure T a une incertitude ΔT, et que V a une incertitude ΔV.
Comment déterminer par calcul l'incertitude résultante ΔP ?

Incertitude sur une mesure

Pour simplifier supposons que $\Delta T = 0$, par conséquent P est une fonction d'une seule variable V

$$P = f(V) = \frac{nRT}{V}$$

Et l'incertitude absolue ΔP vaut :

$$\Delta P = f(V + \Delta V) - f(V) \approx \Delta V f'(V) = \Delta V \times \frac{-nRT}{V^2}$$

Exercice : Que vaut l'incertitude relative $\dfrac{\Delta P}{P}$?

L'outil **fonction dérivée** sert à :

- construire la tangente à une courbe
- étudier les variations d'une fonction

L'outil **limite d'une fonction en un point** sert à :

- étudier l'existence d'asymptotes à une courbe
- définir des objets mathématiques comme π ou le nombre dérivé